BACALAUREAT 2002
SESIUNEA SPECIALĂ

Proba D

Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

SUBIECTUL I

1. **a)** Să se verifice că

$$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2),\ (\forall)\,x,y,z,a,b,c,\in\mathbb{C}.$$

b) Să se deducă inegalitatea $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$, $(\forall)$ $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că, dacă $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$, unde $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}^*$, atunci $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\cdot$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2002^x+2002^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(2,2)$, precum şi dreapta $d:\ y=3$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

c) Să se găsească un punct C pe dreapta d, cu proprietatea că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea permutărilor cu trei elemente S_3, se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.

b) Să se determine numărul de inversiuni al permutării σ.

c) Să se rezolve ecuaţia $\sigma x=\tau$.

d) Să se arate că în orice submulţime H a lui S_3 care are 5 permutări, găsim două permutări x şi y cu proprietatea că $xy\neq yx$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ şi mulţimea $A=\{1,2,3,4\}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcţia f, să se arate că funcţia f' are câte o rădăcină în intervalele $(1,2)$, $(2,3)$ şi $(3,4)$.

c) Să se arate că $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}\backslash A$.

d) Derivând egalitatea de la punctul c), să se arate că $(f'(x))^2>f(x)f''(x)$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}\backslash A$.

SUBIECTUL III

Se consideră un număr prim $p\geq3$, iar în corpul $\mathbb{Z}_p$ se consideră submulţimea $G=\mathbb{Z}_p-\{\hat{0}\}$. Pentru un element $\hat{a}\in G$, definim funcţia $f:G\to G$, $f(\hat{x})=\hat{a}\cdot\hat{x}$.

a) Să se arate că, dacă $\hat{x},\ \hat{y}\in G$, atunci $\hat{x}\cdot\hat{y}\in G$.

b) Să se arate că funcţia f este injectivă.

c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

d) Din egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{(p-1)} = f(\hat{1}) \cdot f(\hat{2}) \cdot \ldots \cdot f\widehat{(p-1)}$, să se deducă relaţia $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$, $(\forall)\ \hat{a} \in G$.

e) Considerăm polinoamele g, $h \in \mathbb{Z}_p[X]$, definite prin $g = X^{p-1} - \hat{1}$, $h = (X - \hat{1})(X - \hat{2}) \ldots (X - \widehat{(p-1)})$. Să se arate că $g(\hat{x}) = h(\hat{x}) = \hat{0}$, $(\forall)\ \hat{x} \in G$.

f) Să se arate că $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{(p-1)} + \hat{1} = \hat{0}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră cunoscut că $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră şirul $(w_n)_{n \geq 1}$, definit prin $w_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se verifice că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că $\lim_{n \to \infty} w_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

SESIUNEA SPECIALĂ

Proba D

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

a) Să se verifice că $f(2 - x) = f(2 + x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 2$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x) \leq 3$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 0)$, $O(0, 0)$ şi $B(3, -4)$.

a) Să se verifice că $OA = OB$.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

c) Să se găsească un punct $C(a, b)$ cu a, $b \in \mathbb{Z}^*$, $C \neq B$ şi $C \neq A$, cu proprietatea că $OC = OB$.

SUBIECTUL II

1. În $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ oi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2 oi A^3.

b) Să se calculeze A^{2002} şi A^{2003}.

c) Să se arate că $A^n \neq I_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2 + x^4$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^2 + 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) \geq \dfrac{1}{1 + x^2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Integrând inegalitatea de la punctul b), să se arate că $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \geq \operatorname{arctg} x$, $(\forall)\ x \geq 0$.

d) Notăm cu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{xf(x)}{F(x)}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru orice $x \in \mathbb{C}$, definim matricea $B(x) = A + xI_3$ şi funcţia polinomială $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \det B(x)$.

a) Să se determine determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se arate că $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{C}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

d) Să se găsească o matrice nenulă $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Să se găsească o matrice nenulă $C \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) Să se arate că nu există o matrice $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

Pentru oricare $p \in \mathbb{N}$ şi $q \in \mathbb{N}$, notăm cu $B(p,q) = \int_0^1 x^q (1-x)^p \, dx$.

a) Să se calculeze $B(1,1)$.

b) Să se arate că $B(0,n) = \dfrac{1}{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Efectuând schimbarea de variabilă $x = 1-t$, să se arate că $B(p,q) = B(q,p)$.

d) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$.

e) Să se arate că $B(n,q) = \dfrac{n!q!}{(q+n)!} B(0, n+q)$, $(\forall)\ n,\ q \in \mathbb{N}$.

f) Să se arate că $B(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$, $(\forall)\ p,\ q \in \mathbb{N}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE
Varianta 1

Proba D

Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 3z - 2\overline{z}$, unde prin $\overline{z}$ notăm conjugatul numărului complex z.

a) Să se verifice că $\overline{f(z)} = 3\overline{z} - 2z$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

b) Să se arate că $(f \circ f)(z) = 13z - 12\overline{z}$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(z) = \dfrac{5^n + 1}{2} z - \dfrac{5^n - 1}{2} \overline{z}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^{2002}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(2n + 1, 3n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului $[A_0A_1]$.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

c) Să se arate că punctul A_k este situat pe dreapta A_0A_1, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin $x \circ y = x + y - 1$.

a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x = 5$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x \circ x^2 \leq 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

d) Notăm cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei f. Să se calculeze $\displaystyle\int_{0}^{1+\frac{\pi}{4}} g(x)\ dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ şi $g = X^4 + 1$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

Se mai consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & a & b & c \\ -c & -d & a & b \\ -b & -c & -d & a \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $g = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.

b) Să se arate că $\det(V) \neq 0$.

c) Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.

d) Utilizând relaţia de la punctul c), să se arate că $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.

e) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

f) Să se arate că $a = b = c = d = 0$ dacă şi numai dacă $\det(A) = 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin $a_n = 1 + \frac{1}{n!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ şi $b_n = a_n + \frac{1}{n! \cdot n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Admitem cunoscut faptul că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent către e.

a) Să se verifice că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

c) Să se arate că $a_{n+1} < e < b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Utilizând inegalităţile de la punctul c), să se arate că $\frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n! \cdot n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând inegalităţile de la punctul d), să se arate că numărul e este iraţional.

f) Să se arate că nu există două polinoame nenule f, $g \in \mathbb{R}[X]$, cu proprietatea că $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinoamele $f = X^3 + X^2 + 1$ şi $g = X^4 + X^3 + X + 1$. Notăm cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raţionale.

c) Să se arate că $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) \in \mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x^2)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(-n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie coordonatele punctelor A_0 şi A_1.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

c) Să se arate că aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ nu depinde de $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 8z - \overline{z}$, unde prin $\overline{z}$ notăm conjugatul numărului complex z.

a) Să se verifice că $f(x + iy) = 7x + 9yi$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f(z) = 0$.

c) Să se arate că funcţia f este injectivă.

d) Să se arate că funcţia f este surjectivă.

2. Se consideră funcţia $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9 - x^2$. Notăm cu S suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox.

a) Să se calculeze aria suprafeţei S.

b) Să se arate că dreapta $x = 0$ desparte suprafaţa S în două regiuni de arii egale.

c) Să se arate că dreapta $y = 9 - \dfrac{9}{\sqrt[3]{4}}$· desparte suprafaţa S în două regiuni de arii egale.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \middle| \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5$ şi $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.

c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$ atunci $A + B \in G$ şi $A \cdot B \in G$.

d) Să se determine numărul de elemente din mulţimea G.

e) Să se arate că, dacă $A \in G$ şi $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $A \cdot B = I_2$.

f) Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^{2002}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f'\left(\frac{1}{n}\right) + f'\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f'\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

d) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că pentru orice $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ avem inegalităţile

$$\left(x - \frac{k}{n}\right) \cdot f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \left(x - \frac{k}{n}\right) \cdot f'\left(\frac{k}{n}\right),\ (\forall)\, n \geq 2$$

şi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

e) Integrând inegalităţile de la punctul d), să se arate că

$$-\frac{1}{2n^2} \cdot f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\, dx \leq -\frac{1}{2n^2} \cdot f'\left(\frac{k}{n}\right),\ (\forall)\, n \geq 2$$

şi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

f) Adunând inegalităţile de la punctul e), să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right).$$

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = (X^2 - 1)(X^2 - 4) - 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f = X^4 - 5X^2 + 3$.

b) Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.

c) Să se arate că $x_1^{2003} + x_2^{2003} + x_3^{2003} + x_4^{2003} \in \mathbb{N}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^5 - (x-1)^5$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

d) Să se calculeze $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2n}{n^2+1}\right)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice identitatea $(x^2-1)^2 + (2x)^2 = (x^2+1)^2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $OA_n = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că pe cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$ avem o infinitate de puncte cu ambele coordonate raţionale.

SUBIECTUL II

1. Se consideră inelul $\mathbb{Z}_6$ şi funcţia $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $f(\hat{x}) = \hat{x}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că $\hat{a}^3 = \hat{a}$, $(\forall)\ \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.

b) Să se arate că $(\hat{x} + \hat{y})^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3$, $(\forall)\ \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_6$.

c) Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care funcţia f este un izomorfism de inele.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2+4) - \ln(x^2+1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

d) Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln 4$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

c) Să se arate că, dacă $Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ şi $YA = AY$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

d) Se consideră matricea $Z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{C}$. Să se arate, folosind metoda inducţiei matematice, că $Z^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Se consideră polinomul $f = X^n - \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că polinomul f nu are rădăcini multiple.

f) Să se determine numărul de soluţii $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ ale ecuaţiei $X^{2002} = A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\ dx$ şi $I_n = \int_0^1 e^{-x}x^n\ dx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $I_n = -\frac{1}{e} + n \cdot I_{n-1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $I_n = \frac{n!}{e}\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)\right)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $\frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

e) Integrând inegalităţile de la punctul d), să se arate că $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

f) Utilizând inegalităţile de la punctul e), să se arate că $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2 + 2x$.

a) Să se verifice că $f(x) = (x+1)^2 - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{C}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $(f \circ f)(x) = 0$.

c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{C}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, -n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se arate că lungimea segmentului A_nA_{n+1} nu depinde de n, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$, unde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se rezolve sistemul.

c) Să se găsească o soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Admitem cunoscut faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6}$ şi considerăm şirurile $(b_n)_{n \geq 1}$ şi $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin $b_n = a_n + \dfrac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $c_n = a_n + \dfrac{1}{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

b) Să se arate că şirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

c) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

d) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(a_n - \dfrac{\pi^2}{6} \right) = -1$.

SUBIECTUL III

Pentru orice număr natural nenul n, se consideră mulţimea de numere raţionale $H_n = \left\{ \dfrac{k}{n!} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că, dacă $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.

b) Să se arate că, dacă $x, y \in H_n$, atunci $x \cdot y \in H_n$.

c) Să se arate că, dacă $n < p \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset H_p$.

d) Să se arate că pentru orice număr raţional r, există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $r \in H_n$.

e) Să se arate că dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ şi $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.

f) Să se demonstreze că, dacă $G_1, G_2, \ldots, G_{2002}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$ şi $\mathbb{Q} = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{2002}$, atunci există $i \in \{1, 2, \ldots, 2002\}$ astfel încât $G_i = \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$ şi $F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - \ldots - \frac{a_n}{n} \cos nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $F(x + 2k\pi) = F(x)$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând rezultatul: "*Dacă o funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică şi monotonă, atunci funcţia g este constantă*", să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia F este constantă.

d) Să se arate că dacă funcţia F este constantă, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

e) Notăm cu $S(p, q) = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx$, $(\forall)\ p, q \in \mathbb{N}^*$.

Utilizând formula
$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b),\ (\forall)\ a, b \in \mathbb{R},$$
să se arate că $S(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \neq q,\ p, q \in \mathbb{N}^* \\ \pi, & (\forall)\ p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

f) Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin $x \circ y = x + y + 2$.

a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall)\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul $e \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$x_0 \circ x_1 \circ \ldots \circ x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n + 2n,\ (\forall)\, x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

d) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 \circ C_n^n = 2n + 64$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2xe^{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(3n, 2n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, punctul A_n se găseşte pe dreapta A_0A_1.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea permutărilor cu 4 elemente, S_4, considerăm permutările $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $H = \{x \in S_4 \,|\, x^2 = e\}$.

a) Să se verifice că $e \in H$.

b) Să se arate că $\sigma \in H$ şi $\tau \in H$.

c) Să se arate că $\sigma\tau \in H$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$, unde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$.

b) Să se verifice că $f(x + 2n\pi) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Utilizând rezultatul: "*Dacă o funcţie periodică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limită la infinit, atunci funcţia este constantă*", să se arate că dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, atunci $a = b = c = 0$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = X^5 - 1$ şi $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se verifice că $g = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$, unde $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ şi $b = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

c) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

d) Se consideră polinomul cu coeficienţi raţionali $h = X^2 + pX + q$. Să se arate că dacă polinoamele f şi h nu sunt prime între ele, atunci ele au polinomul $X - 1$ ca cel mai mare divizor comun în $\mathbb{Q}[X]$.

e) În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}$. Să se verifice că $A^2 - (r+u)A + (ru - st)I_2 = O_2$.

f) Să se arate că dacă $A^5 = I_2$, atunci $A = I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Să se deducă relaţia

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2},\ (\forall)\, x \in [0,1],\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Să se arate că $0 \leq \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Integrând inegalităţile de la punctul c), să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\, dx = 0$.

e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

f) Integrând inegalităţile de la punctul b), să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}\cdot$

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ şi $C(-1, 1)$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

b) Să se determine panta dreptei AB.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$, unde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se rezolve sistemul.

c) Să se găsească o soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului, cu proprietatea ca $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1 + 1} \cdot \dfrac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 2 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.

a) Să se verifice că $f(x + 1) = x^2 + x + 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

b) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $a_n = \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int_0^n f(x)\, dx}{n^3}$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea
$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in (0, \infty),\, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice că matricea $I_2 \in G$.

b) Să se arate că, dacă A, $B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Să se arate că, dacă $C \in G$, atunci există $D \in G$, astfel încât $CD = DC = I_2$.

d) Să se găsească două matrice S, $T \in G$ pentru care $ST \neq TS$.

e) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $A \in G$ şi $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, există o matrice $X \in G$ astfel încât $X^n = A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x - x^2 - x^3 + \ldots + x^8$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^9 + 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(-1)$ şi $g(-1)$.

b) Să se verifice că $(x+1)f(x) = g(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că dacă $x < -1$, atunci $g(x) < 0$ şi dacă $x > -1$, atunci $g(x) > 0$.

d) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \dfrac{x^9}{9}$ este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

f) Să se arate că $F(x) > 0$, $(\forall)$ $x > 0$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. **a)** Să se verifice că $\left(a-\frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a-\frac{1}{a}\right)$, $(\forall)\ a \in \mathbb{C}^*$.

b) Să se arate că dacă $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, atunci $a \geq \frac{1}{a}\cdot$

c) Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, atunci $x^3 - \frac{1}{x^3} \geq 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 4x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}\cdot$

c) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, -1)$, $B(2, -2)$ şi $C(3, -3)$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

c) Să se arate că punctul B se află pe dreapta AC.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ şi $T = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că, dacă A, $B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii G.

d) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $T^n = I_2$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2002x^{2001}}{x^{2002}+1}\cdot$

a) Să se verifice că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(x^{2002} + 1)$, este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

c) Să se determine asimptota către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, y_2, $y_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se calculeze $g(-1)$.

c) Să se determine y_1, y_2 şi y_3.

d) Să se calculeze $a = y_1^{2002} + y_2^{2002} + y_3^{2002}$.

e) Să se arate că numărul $b = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este natural.

f) Să se arate că $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = 3$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine a, b, $c \in \mathbb{R}$ dacă $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şi $f''(0) = 4$.

c) Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x(x^2 + x)$. Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$g^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2(n+1)x + n^2),\ (\forall)\, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

(Prin $g^{(n)}$ am notat derivata de ordinul n a funcţiei g).

d) Să se arate că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g'(0) + g''(0) + \ldots + g^{(n)}(0)}{n^3}$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se verifice că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 3$.

c) Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuaţia $f(\log_2 x) = 3$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, 2n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze coordonatele punctelor A_0 şi A_1.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

c) Să se arate că A_n se află pe dreapta A_0A_1, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice identitatea $f = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

d) Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -4$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se arate că $x = 1$ este punct de minim global.

c) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

d) Să se arate că $2^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < 2^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2^{\sqrt{3}}}\cdot$

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A,\ B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Să se arate că, dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă şi $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in G$.

d) Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$.

e) Să se arate că dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că mulţimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - x$ şi $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{-x}{x+1}$ şi $g'(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $(\forall)\ x > -1$.

b) Să se calculeze $f'(0)$ şi $g'(0)$.

c) Să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $(\forall)\ x > 0$.

d) Să se arate că $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{3}{n^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \dfrac{2n-1}{n^2}\right) \right)$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 2$.

a) Să se verifice că $f(x) = (x + 2)^2 - 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(f \circ f)(x) = -2$.

c) Să se rezolve în intervalul $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 7$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^3}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$ şi $O(0, 0)$.

a) Să se verifice că $OA = OB = OC$.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei OA.

c) Să se calculeze panta dreptei AB.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie "$\circ$" prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

d) Să se rezolve în $(0, \infty)$ ecuaţia $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -2$

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)(x + 2)}$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x + 2}$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$.

b) Să se arate că $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n + 2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze AB şi BA.

b) Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB şi BA este aceeaşi.

c) Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$.

d) Să se arate că $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \ldots \cdot \det(A_n),\ (\forall)\, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ şi } (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

f) Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $(\forall)\ A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^8$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^7 - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

e) Să se rezolve ecuaţia $F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7}\cdot$

f) Să se arate că $F(x) < xf(x)$, $(\forall)\ x > 0$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X - 6$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x) \leq 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se verifice că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x0 = e^x \sin x$ este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ şi $C(3, 3)$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

b) Să se determine panta dreptei AC.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

SUBIECTUL II

1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie "$\circ$" prin $x \circ y = x + y + 10$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x = 16$.

c) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^2 \circ x = 12$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2 + 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

a) Să se verifice că $A \in G$ şi $I_2 \in G$.

b) Să se găsească o matrice $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.

c) Să se verifice că $A^2 = -I_2$.

d) Să se arate că $A^2X = XA^2$, $(\forall)\ X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

e) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

f) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = aI_2 + bA$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln a - a \ln x$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se calculeze $f(a)$ şi $f'(a)$.

c) Utilizând teorema lui Fermat să se determine $a > 0$ cu proprietatea $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

d) Să se arate că $e^x \geq x^e$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

e) Să se arate că pentru $x > 0$, avem $e^x = x^e$ dacă şi numai dacă $x = e$.

f) Să se determine numerele reale c, $b > 0$ cu proprietatea că $c^x + b^x \geq x^c + x^b$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. O minge cade de la o înălţime de 8 m. După fiecare cădere, mingea se ridică la jumătate din înălţimea de la care a căzut.

a) Să se afle ce distanţă a parcurs mingea de la început şi până a atins pământul a doua oară.

b) Să se afle la ce înălţime se ridică mingea după ce a atins pământul a treia oară.

c) Să se demonstreze că, distanţa parcursă de minge de la început şi până atinge pământul a suta oară, este mai mică decât 24 m.

2. Se consideră mulţimea A formată din toate numerele naturale, scrise în baza 10, care se termină cu cifra 7.

a) Să se găsească un cub perfect în mulţimea A.

b) Să se arate că mulţimea A nu conţine niciun pătrat perfect.

c) Să se arate că mulţimea A conţine o infinitate de cuburi perfecte.

3. Un număr a se măreşte cu 10% din valoarea sa şi se obţine numărul b. Numărul b se micşorează cu 10% din valoarea sa şi se obţine numărul c.

a) Să se arate că $10b = 11a$.

b) Să se arate că $10c = 9b$.

c) Să se determine numerele a, b şi c, ştiind că $a - c = 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea $A = \{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se verifice că $0 \in A$ şi $1 \in A$.

b) Să se arate că $2 \notin A$.

c) Să se verifice identitatea $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că mulţimea A conţine toate numerele întregi impare.

2. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că $A \in G$ şi $B \in G$.

c) Să se arate că $AB \notin G$.

d) Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care $(AB)^n = I_2$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(1)$ şi $f(-1)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât să avem identitatea $f(X) = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

c) Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1$.

d) Să se arate că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 5$.

2. Se consideră fracţia $\frac{2}{11} = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$.

a) Să se calculeze a_1 şi a_2.

b) Să se calculeze $S = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2002}$.

c) Să se calculeze $T = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2002}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră un triunghi ABC şi M un punct situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC. Se duc perpendiculare din punctul M pe laturile AB, BC şi AC în D, E respectiv F. Notăm cu $h_a \leq h_b \leq h_c$ lungimile înălţimilor triunghiului ABC duse din A, B respectiv C.

a) Să se verifice că $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BMC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CMA}}{S_{ABC}} = 1$, unde prin S_{XYZ} am notat aria triunghiului XYZ.

b) Să se deducă relaţia $\frac{MD}{h_c} + \frac{ME}{h_a} + \frac{MF}{h_b} = 1$.

c) Să se verifice egalitatea $MD + ME + MF = \frac{MD}{h_c} \cdot h_c + \frac{ME}{h_a} \cdot h_a + \frac{MF}{h_b} \cdot h_b$.

d) Să se arate că, dacă x, y, z, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $x \leq y \leq z$ şi a, b, $c \in [0, 1]$ cu $a + b + c = 1$, atunci $x \leq ax + by + cz \leq z$.

e) Utilizând relaţiile de la punctele b), c) şi d), să se arate că $h_a \leq MD + ME + MF \leq h_c$, pentru orice punct M situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Matematicianul Sorin a hotărât să publice articole de matematică. La vârsta de 21 de ani el publică un articol. Apoi, în fiecare an el publică un articol mai mult decât în anul precedent.

a) Să se afle câte articole a publicat Sorin după trei ani.

b) Să se afle câte articole a publicat Sorin în anul în care a avut vârsta de 30 de ani.

c) Să se determine cel mai mic număr natural n, cu proprietatea că, după n ani, Sorin a publicat mai multe articole decât dublul vârstei sale.

2. Un număr natural $n \geq 2$ se numeşte "*plin de putere*" dacă fiecare factor prim din descompunerea sa apare la o putere strict mai mare decât 1. (De exemplu, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ este "*plin de putere*").

a) Să se verifice că numerele 8 şi 9 sunt "*pline de putere*".

b) Să se verifice identitatea $4n(n+1)+1 = (2n+1)^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că produsul a două numere "*pline de putere*" este un număr "*plin de putere*".

d) Să se găsească un număr natural n, $n \geq 10$, cu proprietatea că n şi $n+1$ sunt numere "*pline de putere*".

3. Trei urne A, B, C conţin bile. O bilă din urna A cântăreşte 1 g, o bilă din urna B cântăreşte 2 g şi o bilă din urna C cântăreşte 4 g. Se ştie că oricare două urne au împreună de două ori mai multe bile decât în urna rămasă.

a) Să se arate că suma numărul bilelor din cele trei urne este de trei ori numărul bilelor din urna A.

b) Să se arate că în fiecare urnă avem acelaşi număr de bile.

c) Dacă cântărim trei bile şi obţinem 7 g, atunci să se precizeze din ce urnă a provenit fiecare bilă cântărită.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + 1$.

a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{C}$.

b) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească cel mai mare număr natural n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n < 2002$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x = 3$.

2. Se consideră mulţimea $A = \{4x + 5y \,|\, x, y \in \mathbb{N}\}$.

a) Să se verifice că numerele 12, 13, 14, 15 aparţin mulţimii A.

b) Să se arate că $11 \notin A$.

c) Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, $12 \leq n \leq 2002$, atunci $n \in A$.

SUBIECTUL III

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) Să se găsească $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $b \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ şi $\det(A) = 1$.

2. **a)** Să se verifice identitatea $(a^2-1)^2 + (2a)^2 = (a^2+1)^2$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

b) Să se găsească o soluţie $(x, y) \in (\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z})$ a ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$.

c) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii în mulţimea $(\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z})$.

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu înălţimile din A, B, C, D egale cu $h_A \leq h_B \leq h_C \leq h_D$. Dintr-un punct M situat în interiorul sau pe feţele tetraedrului ducem perpendiculare pe feţele BCD, ACD, ABD şi ABC în E, F, G respectiv H.

a) Să se verifice că $\dfrac{V_{MABC}}{V_{ABCD}} + \dfrac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} + \dfrac{V_{MABD}}{V_{ABCD}} + \dfrac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} = 1$, unde prin V_{XYZT} am notat volumul tetraedrului $XYZT$.

b) Să se deducă relaţia $\dfrac{ME}{h_A} + \dfrac{MF}{h_B} + \dfrac{MG}{h_C} + \dfrac{MH}{h_D} = 1$.

c) Să se verifice egalitatea $ME + MF + MG + MH = \dfrac{ME}{h_A} \cdot h_A + \dfrac{MF}{h_B} \cdot h_B + \dfrac{MG}{h_C} \cdot h_C + \dfrac{MH}{h_D} \cdot h_D$.

d) Să se arate că, dacă x, y, z, t, a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $x \leq y \leq z \leq t$ şi a, b, c, $d \in [0, 1]$ cu $a + b + c + d = 1$, atunci $x \leq ax + by + cz + dt \leq t$.

e) Utilizând relaţiile de la punctele b), c) şi d), să se arate că $h_A \leq ME + MF + MG + MH \leq h_D$, pentru orice punct M situat în interiorul tetraedrului $ABCD$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Pentru efectuarea unor plăţi, un casier are numai bancnote de 3 euro şi de 5 euro în număr nelimitat.

- **a)** Să se arate că nu poate achita exact 7 euro.
- **b)** Să se arate că el poate achita exact 8 euro, 9 euro şi 10 euro.
- **c)** Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $8 \leq n \leq 2002$, atunci casierul poate achita exact n euro.

2. Un număr natural $n \geq 2$ se numeşte *compus* dacă nu este număr prim.

- **a)** Să se arate că numerele 8 şi 9 sunt *compuse*.
- **b)** Să se găsească patru numere naturale consecutive mai mici decât 100 care sunt *compuse*.
- **c)** Să se arate că numerele $A_1 = 2003!+2$, $A_2 = 2003!+3$, $\ldots$, $A_{2002} = 2003!+2003$ sunt 2002 numere naturale consecutive *compuse*.

3. Patru fraţi A, B, C, D au împreună 20 de ani. Se ştie că dublul vârstei lui B este suma vârstelor lui A şi C, iar dublul vârstei lui C este suma vârstelor lui B şi D. Se mai ştie că A şi B au împreună atâţia ani cât are C.

- **a)** Să se arate că suma vârstelor lui A şi D este aceeaşi cu suma vârstelor lui B şi C.
- **b)** Să se afle vârsta lui B.
- **c)** Să se afle vârstele lui A, C şi D.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze AB.
- **b)** Să se calculeze $\det(A)$ şi $\det(B)$.
- **c)** Să se verifice că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$\det(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = \det(X_1) \cdot \det(X_2) \cdot \ldots \cdot \det(X_n),\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } (\forall)\, X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).$$

2.
- **a)** Să se verifice că $\hat{x}^3 = \hat{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{Z}_6$.
- **b)** Să se arate că $\hat{x}^{2001} = \hat{x}$ şi $\hat{x}^{2002} = \hat{x}^2$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{Z}_6$.
- **c)** Să se arate că ecuaţia $\hat{x}^{2002} + \hat{x}^{2001} + \ldots + \hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{1}$ nu are soluţie în inelul $\mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se verifice că $f = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.
- **b)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
- **c)** Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
- **d)** Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -4$.
- **e)** Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

2. Se consideră numerele $a_n = 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- **a)** Să se stabilească dacă numărul a_0 este prim.
- **b)** Să se arate că numărul a_n nu este prim, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu laturile $AB = 4$ şi $BC = 3$ se ridică perpendicularele $AA' = 2$, $BB' = 4$, $CC' = 8$ şi $DD' = 6$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$.

b) Să se verifice că $AA' + CC' = BB' + DD'$.

c) Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii în trapezele $AA'C'C$ şi $BB'D'D$.

d) Să se arate că punctele A', B', C' şi D' sunt coplanare.

e) Să se arate că patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

f) Să se calculeze aria patrulaterului $A'B'C'D'$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. La un spectacol, 25% din spectatori sunt băieţi şi 75% sunt fete. Dintre băieţi, 40% au ochi albaştri, iar dintre fete 20% au ochi albaştri. Se ştie că în sala de spectacol sunt 300 de spectatori cu ochi albaştri.

a) Să se arate că 10% dintre spectatori sunt băieţi care au ochi albaştri.

b) Să se arate că 15% dintre spectatori sunt fete care au ochi albaştri.

c) Să se afle numărul total de spectatori.

2. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale de trei cifre şi cu B mulţimea numerelor naturale formate din trei cifre distincte. Precizăm că toate numerele despre care se discută în problemă sunt scrise în baza 10.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

b) Să se determine numărul elementelor mulţimii B.

3. La un turneu de tenis participă 128 de jucători. Înaintea fiecărui tur, se împart jucătorii în grupe de câte 2, care joacă între ei. Învinsul părăseşte turneul. Turneul se termină când rămâne un singur jucător. Pentru participarea la turneu, jucătorii sunt premiaţi cu câte 100 de euro pentru fiecare meci jucat în turul 1, câte 200 de euro pentru fiecare meci jucat în turul 2, câte 300 de euro pentru fiecare meci jucat în turul 3, etc.

a) Să se afle câţi euro au fost plătiţi de organizatori pentru meciurile din primul tur.

b) Câţi euro a câştigat un jucător care părăseşte turneul în turul 3?

c) Câţi euro primeşte câştigătorul turneului, dacă pentru victoria finală mai primeşte 1000 de euro?

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea $A = \{\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$. De exemplu, $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, deci $1 \in A$ şi $2 \in A$.

a) Să se arate că $3 \in A$ şi $4 \in A$.

b) Să se verifice că $4 = (x+1)^2 - (x+2)^2 - (x+3)^2 + (x+4)^2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $p \in A$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $A = \mathbb{Z}$.

2. Se consideră polinomul $f = (X+1)(X-1)(X-2)+1$.

a) Să verifice că $f = X^3 - 2X^2 - X + 3$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raţionale.

c) Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \,|\, AX = XA\}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se verifice că $A^2 = -I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $A \in G$.

d) Să se găsească o matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $AB \neq BA$.

e) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = aI_2 + bA$.

2. **a)** Să se scrie numărul 4 ca o sumă de două numere naturale prime nu neapărat diferite.

b) Să se scrie numărul 8 ca o sumă de trei numere naturale prime nu neapărat diferite.

c) Să se arate că orice număr natural $n \geq 4$, se scrie ca o sumă de numere naturale prime, nu neapărat diferite.

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul ABC şi M un punct în planul său, din care ducem perpendiculare pe latura AB în D, pe latura BC în E şi pe latura AC în F.

a) Utilizând teorema lui Pitagora, să se arate că $AD^2 - BD^2 = MA^2 - MB^2$.

b) Să se demonstreze că $AD^2 - BD^2 + BE^2 - EC^2 + CF^2 - FA^2 = 0$.

c) Să se arate că, dacă X şi Y sunt două puncte pe dreapta AB şi $XA^2 - XB^2 = YA^2 - YB^2$, atunci $X = Y$.

d) Să se arate că, dacă $X \in AB$, $Y \in BC$ şi $Z \in AC$ astfel încât $XA^2 - XB^2 + YB^2 - YC^2 + ZC^2 - ZA^2 = 0$, atunci perpendicularele duse în X, Y respectiv Z pe laturile AB, BC respectiv AC sunt concurente.

e) Să se arate că, dacă triunghiul ABC este echilateral, cu latura de lungime a şi punctul M se află în interiorul triunghiului, atunci $AD + BE + CF = \dfrac{3a}{2}$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. O insulă vulcanică are înălţimea de 100 m. În fiecare an, datorită activităţii vulcanice, insula creşte cu 5% din înălţimea sa.

a) Să se afle înălţimea insulei după un an.

b) Să se afle ce înălţime are insula după 2 ani.

c) Să se arate că, după 20 de ani, insula are cel puţin 200 m înălţime.

2. Trei bile a, b şi c cântăresc împreună 300 g. Se ştie că suma greutăţilor bilelor a şi b este egală cu dublul greutăţii bilei c şi că produsul greutăţilor bilelor b şi c este egală cu pătratul greutăţii bilei a.

a) Să se afle cât cântăreşte bila c.

b) Să se afle cât cântăreşte bila a.

c) Să se afle cât cântăreşte bila b.

3. La un stadion cu capacitatea de 10000 locuri, vin spectatorii. În primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, ... , în al n-lea minut sosesc $2n-1$ spectatori.

a) Să se afle câţi spectatori au venit după primele 5 minute.

b) Să se arate că $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se determine cel mai mic număr natural n, cu proprietatea că, după n minute, stadionul este plin.

SUBIECTUL II

1. Se consideră o mulţime A cu 10 elemente.

a) Să se determine numărul submulţimilor mulţimii A care au cel mult un element.

b) Să se determine numărul submulţimilor mulţimii A care au cel mult două elemente.

c) Să se arate că numărul submulţimilor mulţimii A care au un număr impar de elemente este egal cu numărul submulţimilor mulţimii A care au un număr par de elemente.

2. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, precum şi submulţimea

$G=\{X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\,|\,AX=XA\}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se verifice că $I_2\in G$ şi $A\in G$.

c) Să se arate că, dacă $a,\ b\in\mathbb{C}$, atunci $aI_2+bA\in G$.

d) Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci există $a,\ b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=aI_2+bA$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră polinomul $f=(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+1$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se arate că $f=(X^2-5X+5)^2$.

c) Să se arate că $f(k)\geq 1$, $(\forall)\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Se consideră numerele $a_n=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că a_1, a_2, a_3 şi a_4 sunt pătrate perfecte.

b) Să se arate că, dacă $n\geq 5$, atunci a_n nu este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida $VABC$. Notăm cu G_1, G_2, G_3 respectiv G_4 centrele de greutate ale feţelor ABC, VBC, VAC respectiv VAB. Notăm cu D mijlocul segmentului BC.

a) Să se arate că dreptele VG_1 şi AG_2 sunt conţinute în planul VAD.

b) Să se arate că dreptele G_1G_2 şi VA sunt paralele şi $G_1G_2 = \dfrac{VA}{3}$.

c) Să se arate că planele $(G_1G_2G_3)$ şi (VAB) sunt paralele.

d) Să se arate că raportul dintre aria triunghiului $G_1G_2G_3$ şi aria triunghiului VAB este egal cu $\dfrac{1}{9}$.

e) Ştiind că piramida $VABC$ are toate muchiile (laterale şi ale bazei) egale, să se arate că raportul dintre volumul piramidei $G_1G_2G_3G_4$ şi volumul piramidei $VABC$ este egal cu $\dfrac{1}{27}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 3

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B == \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,|\, X^2 = I_2\}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că $A \in G$ şi $B \in G$.

c) Să se calculeze AB.

d) Să se arate că $AB \notin G$.

e) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $(AB)^n = I_2$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2002} + x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt}{x^{2003}}$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{C}$.

b) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{C}$.

c) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1 + i) \circ (x_2 + i) \circ \ldots \circ (x_n + i) - i,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}.$$

e) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^6$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^7 - 1$.

a) Să se calculeze $f(1)$ şi $g(1)$.

b) Să se verifice că $(x - 1)f(x) = x^7 - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcţia g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(n)}{nf(n)}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ şi $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{10}$.

b) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

d) Să se arate că $f = (X - \sqrt{2} - \sqrt{5})(X - \sqrt{2} + \sqrt{5})(X + \sqrt{2} - \sqrt{5})(X + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.

e) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

f) Să se arate că $x_1^{2003} + x_2^{2003} + x_3^{2003} + x_4^{2003} = 0$.

BACALAUREAT 2002
SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \epsilon z + 1$, unde $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Să se verifice că $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$ şi că $\epsilon^3 = 1$.

b) Să se arate că $(f \circ f \circ f)(z) = z$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $(f \circ f \circ f)(z) = z^4$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Să se verifice că $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sqrt{n+1} - 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 12)$, $B(12, 5)$, $C(0, 13)$ şi $O(0, 0)$.

a) Să se calculeze panta dreptei AB.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

c) Să se verifice că $OA = OB = OC$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine numărul real a pentru care avem identitatea $C_x^2 = \frac{ax(x-1)}{2}$, $(\forall)\ x \in\in \mathbb{N}$, $x \geq 2$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuaţia $C_n^2 < 6$, $n \geq 2$.

c) Să se verifice identitatea $C_x^y = C_{x+1}^{y+1} - C_x^{y+1}$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{N}$, $x > y \geq 0$.

d) Utilizând relaţia de la punctul c), să se arate că $C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1} - 1$, $(\forall)\ p, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se arate că $f(x) \leq f(e)$, $(\forall)\ x > 0$.

c) Să se deducă inegalitatea $x^e \leq e^x$, $(\forall)\ x > 0$.

d) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ dx$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \middle|\ \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5$ şi $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.

c) Să se arate că, dacă $A,\ B \in G$, atunci $A + B \in G$ şi $AB \in G$.

d) Să se determine numărul elementelor mulţimii G.

e) Să se arate că, dacă $A \in G$ şi $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $AB = I_2$.

f) Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2002}$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^{2003} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că funcţia F este bijectivă.

f) Notăm cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei F şi cu $a = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2003}\cdot$ Să se calculeze $\displaystyle\int_0^a g(x)\ dx$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 4$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice identitatea $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

d) Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -16$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii:

$$d_1 : x + 2y + 3 = 0, \quad d_2 : 2x + y + 3 = 0, \quad d_3 : 3x + 4y + 7 = 0.$$

a) Să se scrie determine coordonatele punctului de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în $O(0, 0)$ şi care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine numărul real a pentru care avem identitatea $A_x^2 = ax(x-1)$, $(\forall)\ x \geq 2$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuaţia $A_n^2 < 12$, $n \geq 2$.

c) Să se verifice identitatea $C_x^{y+1} = C_{x+1}^{y+1} - C_x^y$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$.

d) Utilizând relaţia de la punctul c), să se arate că $C_p^r + C_{p+1}^{r+1} + \ldots + C_{p+n}^{r+n} = C_{p+n+1}^{r+n} - C_p^{r-1}$, $(\forall)\ p, r, n \in \mathbb{N}^*$, $p > r$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2003} + x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

d) Notăm cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei f. Să se calculeze $\displaystyle\int_1^3 g(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z}_3)$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle|\ \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ şi matricea $I_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$ atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că, oricare ar fi matricea $A \in G$, avem $A^3 = I_3$.

d) Să se găsească două matrice $A, B \in G$ pentru care $AB \neq BA$.

e) Să se dea un exemplu de structură de grup necomutativ cu 27 de elemente, $(H, \cdot)$, în care $x^3 = e$, $(\forall)\ x \in H$, unde e este elementul neutru al grupului H.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, unde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se determine $m > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

d) Pentru $m = 10$, să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

e) Să se demonstreze că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < c < d$ şi $a + d = b + c$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc relaţia $a^n + d^n > b^n + c^n$.

f) Considerând $m = 10$, să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem $f^{(n)}(0) > 0$. (Am notat prin $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcţiei f).

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

a) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^5 + (x - 1)^5$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 25$.

a) Să se scrie determine coordonatele centrului cercului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $A(3, 4)$ se află pe cerc.

c) Să se arate că dreapta de ecuaţie $3x + 4y - 25 = 0$ este tangentă la cerc în punctul $A(3, 4)$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie "$\circ$", definită prin $x \circ y = x + y - 1$.

a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall)$ x, y, $z \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x = 5$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x \circ x^2 \le 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

a) Să se verifice că $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

d) Notăm cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei f. Să se calculeze $g'(0)$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ şi $g = X^4 - 1$, unde a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, iar g are rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

Se mai consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $g = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.

b) Să se arate că $\det(V) \neq 0$.

c) Să se arate că $AV = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.

d) Utilizând relaţia de la punctul c), să se arate că $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.

e) Pentru $a = c = d = 0$ şi $b = 1$, să se calculeze A^2 şi A^4.

f) Pentru $a = c = d = 0$ şi $b = 1$, să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

SUBIECTUL IV

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}x^n$, $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1-e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ şi $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)\ dt$.

a) Să se calculeze $g(0)$ şi $h(0)$.

b) Să se verifice că $g'(x) = h'(x)$, $(\forall)\ x \geq 0$.

c) Să se arate că $g(x) = h(x)$, $(\forall)\ x \geq 0$.

d) Să se arate că $0 \leq g(x) \leq \frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!}$, $(\forall)\ x \in [0, n]$.

e) Să se arate că, dacă $x \geq 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$.

f) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $(\forall)\ x \geq 0$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine valorile parametrului m, astfel încât $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Pentru $m = 0$, să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Pentru $m = 0$, să se rezolve ecuaţia $f(2^x) = 8$.

d) Pentru $m = 0$, să se rezolve inecuaţia $f(x) \leq 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 3)$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

b) Să se determine panta dreptei AB.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei BC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = (X+1)^{10}$, cu forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

c) Să se arate că $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{10} = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$, $(\forall)\ x \geq 0$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $A \in G$.

c) Să se arate că $XA^2 = A^2X$, $(\forall)\ X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Să se găsească o matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB \neq BA$.

e) Să se arate că, dacă a, $b \in \mathbb{C}$, atunci $aI_2 + bA \in G$.

f) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există x, $y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$. (S-a notat prin $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcţiei f).

c) Să se arate că $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{n^3}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

f) Să se găsească o funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indefinit derivabilă, cu proprietatea că $g^{(n)}(0) = n(n+1)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice identitatea $f = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

d) Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -4$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^4 + (x - 1)^4$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6, 8)$, $B(8, 6)$, $C(0, 10)$.

a) Să se determine panta dreptei AB.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

c) Să se verifice că $OA = OB = OC$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie ”$\circ$”, definită prin $x \circ y = x + y + 1$.

a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, cu proprietatea că $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ (2x) \circ \ldots \circ (2002x) = 2001$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x + 9}{x^2 + 1}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că $A \in G$ şi $B \in G$.

c) Să se arate că $AB \neq BA$.

d) Să se arate că $AB \notin G$.

e) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, cu proprietatea că $(AB)^n = I_2$.

f) Să se arate că mulţimea G are cel puţin 6 elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

a) Să se determine asimptota verticală a graficului funcţiei f.

b) Să se determine asimptota la $+\infty$ a graficului funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

d) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

e) Să se deducă inegalităţile $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$, $(\forall)\ x \geq 0$.

f) Să se arate că aria cuprinsă între graficul funcţiei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^9}$, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$, este un număr real cuprins în intervalul $(0,91; 0,96)$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 6$.

a) Să se verifice că $f(x) = (x+3)^2 - 3$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) \geq -3$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 22$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,-1)$, $C(-1,1)$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

b) Să se determine panta dreptei AB.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = (X+1)^{10} + (X-1)^{10}$ cu forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

c) Să se arate că $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{10} = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x}{4x^4 + 1}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$. Se mai consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $f(x) = g(x) - g(x+1)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $a_n = 1 - \dfrac{1}{2n^2 + 2n + 1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle|\ a^2 - 3b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că, dacă A, $B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Să se arate că, dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă şi $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$

d) Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$.

e) Să se arate că, dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că mulţimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x - x$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a_0 = 1$ şi $a_{n+1} = f(a_n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi că funcţia g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $g(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi mărginit.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Se consideră mulţimea A compusă din toate numerele de patru cifre distincte, scrise în baza 10, formate cu cifrele 1, 2, 3 şi 4.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.
Se ordonează crescător elementele mulţimii A. (Pe locul întâi este cel mai mic element, pe locul doi este următorul, etc.).

b) Să se determine elementul din mulţimea A, situat pe locul trei.

c) Să se afle pe ce loc se găseşte elementul 4132 în mulţimea A.

2. Un călător are de parcurs o distanţă între două oraşe. În prima zi el a parcurs jumătate din distanţă şi încă un kilometru. A doua zi el a parcurs jumătate din distanţa rămasă şi încă un kilometru. A treia zi a parcurs ultimii 30 de kilometri.

a) Să se determine distanţa parcursă de călător în ziua a doua.

b) Să se determine distanţa parcursă de călător în prima zi.

c) Să se afle câte zile ar fi durat călătoria, dacă în fiecare zi călătorul ar fi parcurs jumătate din distanţa rămasă şi încă un kilometru.

3. Se consideră numărul $a = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 50$.

a) Să se determine numărul de zerouri cu care se termină numărul a în scrierea zecimală.

b) Să se arate că numărul a nu este pătratul unui număr natural.

c) Să se arate că numărul a nu este cubul unui număr natural.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze AB.

b) Să se calculeze $\det(A)$ şi $\det(B)$.

c) Să se verifice că $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că
$\det(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = \det(X_1) \cdot \det(X_2) \cdot \ldots \cdot \det(X_n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $(\forall)\ X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 4$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

d) Să se calculeze $T = \frac{1}{x_1} + + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\cdot$

SUBIECTUL III

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$", definită prin $x \circ y = x + y - 1$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real e, pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că numărul $1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2002$ nu este pătratul unui număr natural.

d) Să se găsească două elemente a, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Q}$.

2. **a)** Să se găsească două numere naturale c şi d, cu proprietatea că $c^2 + d^2 = 41$.

b) Să se arate că nu există două numere naturale x şi y, cu proprietatea că $x^2 + y^2 = 43$.

SUBIECTUL IV

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu laturile $AB = 8$ şi $BC = 6$ se ridică perpendicularele $AA' = 8$, $BB' = 4$, $CC' = 2$ şi $DD' = 6$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ şi $A'D'$.

b) Să se verifice că $AA' + CC' = BB' + DD'$.

c) Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii în trapezele $AA'C'C$ şi $BB'D'D$.

d) Să se arate că punctele A', B', C' şi D' sunt coplanare.

e) Să se arate că patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

f) Să se calculeze aria patrulaterului $A'B'C'D'$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Într-o cofetărie, o bomboană costă 2 euro şi o ciocolată costă 7 euro. Un copil are 45 euro şi cumpără bomboane şi ciocolată. Numim ”combinaţie de bomboane şi ciocolate de 45 euro” un număr de bomboane şi un număr de ciocolate care costă împreună 45 euro. De exemplu, 19 bomboane şi o ciocolată constituie ”combinaţie de bomboane şi ciocolate de 45 euro”.

a) Să se găsească o altă ”combinaţie de bomboane şi ciocolate de 45 euro”.

b) Să se determine numărul maxim de ciocolate pe care îl poate conţine o ”combinaţie de bomboane şi ciocolate de 45 euro”.

c) Să se găsească numărul total de ”combinaţii de bomboane şi ciocolate de 45 euro”.

2. Un autoturism costă la lansarea pe piaţă 10000 euro. După fiecare an, preţul său scade cu 20% din valoarea avută la începutul anului.

a) Să se afle cât va costa autoturismul peste un an.

b) Să se determine preţul autoturismului după trei ani.

c) Să se determine cel mai mic număr natural n, cu proprietatea că după n ani autoturismul va costa mai puţin de 5000 euro.

3. Se consideră numărul natural $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

a) Să se determine numărul divizorilor naturali ai numărului a.

b) Să se calculeze suma tuturor divizorilor naturali ai numărului a.

c) Să se calculeze produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului a.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie ”$\circ$”, definită prin $x \circ y = x + y - 1$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

b) Să se găsească două elemente $a,\ b \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

c) Să se determine cel mai mare număr natural n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n < 2002$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x = 5$.

2. Se consideră mulţimea $A = \{3x + 4y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$.

a) Să se verifice că numerele 6, 7, 8 aparţin mulţimii A.

b) Să se arate că $5 \notin A$.

c) Să se arate că, dacă $n \in A$, atunci $n + 3 \in A$.

d) Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $6 \le n \le 2002$, atunci $n \in A$.

SUBIECTUL III

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A,\ B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că, dacă $A,\ B \in G$, atunci $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) Să se arate că, dacă $A \in G$ şi $\det(A) = 1$, atunci $A^4 = I_2$.

2. **a)** Să se verifice identitatea $(a^2 - 1)^2 + (2a)^2 = (a^2 + 1)^2$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

b) Să se găsească o soluţie $(x, y) \in (\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z})$ a ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$.

c) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii în mulţimea $(\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z})$.

SUBIECTUL IV

Piramida patrulateră regulată cu vârful V şi baza $ABCD$ are $VA = AB = a$.

a) Să se calculeze apotema piramidei.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

c) Să se calculeze înălţimea piramidei.

d) Să se calculeze volumul piramidei.

e) Să se arate că muchiile VA şi VC sunt perpendiculare.

f) Fie punctul $P \in (VC)$. Să se determine lungimea segmentului PC, astfel încât perimetrul triunghiului BPD să fie minim.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. La examenul de bacalaureat, proba de limba şi literatura română, o elevă a scris 15 pagini numerotate de la 1 la 15.

a) Să se afle de câte ori a folosit cifra 1 pentru numerotarea paginilor.

b) Să se afle suma numerelor tuturor paginilor.

c) Să se determine suma tuturor cifrelor folosite pentru numerotarea paginilor.

2. Într-o fermă sunt găini şi fiecare dintre ele face exact câte un ou la două zile. În prima zi fermierul a luat 23 de ouă, iar a doua zi a luat 17 ouă.

a) Să se afle câte găini sunt la fermă.

b) Să se afle câte ouă a strâns fermierul după 10 zile.

c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul n, cu proprietatea că la sfârşitul zilei n, fermierul a strâns în total cel puţin 2002 ouă.

3. Se consideră numerele raţionale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, unde $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se determine numerele $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$.

b) Să se determine a_{2002}.

c) Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2002}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea $M = \{a^2 - 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se verifice că $0 \in M$ şi $1 \in M$.

b) Să se verifice identitatea $(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2$, $(\forall)\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că, dacă $x, y \in M$, atunci $x \cdot y \in M$.

d) Să se arate că $3 \notin M$.

2. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că $A \in G$ şi $B \in G$.

c) Să se arate că $AB \notin G$.

d) Să se afle cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $(AB)^n = I_2$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(1)$ şi $f(-1)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât să avem identitatea $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

c) Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 5$.

d) Să se arate că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 1$.

2. Se consideră numerele $a = 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 20$, $b = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$ şi $c = 21 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 30$.

a) Să se arate că numărul a nu este pătratul unui număr natural.

b) Să se arate că numărul b divide numărul a.

c) Să se arate că numărul a nu divide numărul c.

SUBIECTUL IV

Se consideră un triunghi ABC şi M un punct situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC. Se duc perpendiculare din punctul M pe dreptele AB, BC şi AC în D, E respectiv F. Notăm cu $h_a \leq h_b \leq h_c$ lungimile înălţimilor triunghiului ABC duse din A, B respectiv C.

a) Să se verifice că $\dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{BMC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{CMA}}{S_{ABC}} = 1$, unde prin S_{XYZ} am notat aria triunghiului XYZ.

b) Să se arate că $\dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \dfrac{MD}{h_c}$.

c) Să se deducă relaţia $\dfrac{MD}{h_c} + \dfrac{ME}{h_a} + \dfrac{MF}{h_b} = 1$.

d) Să se verifice egalitatea $MD + ME + MF = \dfrac{MD}{h_c} \cdot h_c + \dfrac{ME}{h_a} \cdot h_a + \dfrac{MF}{h_b} \cdot h_b$.

e) Să se arate că, dacă $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, $x \leq y \leq z$ şi $a, b, c \in [0, 1]$ cu $a + b + c = 1$, atunci $x \leq ax + by + cz \leq z$.

f) Utilizând relaţiile de la punctele c), d) şi e), să se arate că $h_a \leq MD + ME + MF \leq h_c$, pentru orice punct M situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se verifice că $f = \left(1 - \frac{X^2}{2}\right)^2 + \left(X + \frac{X^2}{2}\right)^2 + \frac{X^4}{2}$.
- **b)** Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
- **d)** Să se determine $a \in \mathbb{C}$ pentru care avem identitatea $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.
- **e)** Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 3$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 3)}$.

- **a)** Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{(x + 1)^2 + 2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.
- **c)** Să se arate că $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n + 1)^2 + 2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.
- **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.
- **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - \frac{1}{3}\right)$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$", definită prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

- **a)** Să se verifice că $x \circ y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **d)** Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- **e)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, avem
  $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n = 3^{n-1} \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_n + 1) - 1$, $(\forall)\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- **f)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = -1$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

- **a)** Să se verifice că $A \in G$ şi $I_2 \in G$.
- **b)** Să se calculeze determinantul matricei A.
- **c)** Să se verifice că $A^2 = -I_2$.
- **d)** Să se arate că $A^2X = XA^2$, $(\forall)\ X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
- **e)** Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

f) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există x, $y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(f(n)-1)$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. **a)** Să se verifice că $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$, $(\forall)$ a, b, $c \in \mathbb{C}$.

b) Să se arate că, dacă a, b, $c \in \mathbb{C}$ şi $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$, atunci $a+b=0$ sau $b+c=0$ sau $c+a=0$.

c) Să se arate că, dacă a, b, $c \in \mathbb{C}$ şi $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$, atunci $(a+b+c)^{2003} = a^{2003}+b^{2003}+c^{2003}$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(2^x+3^x-4^x)^3 = 2^{3x}+3^{3x}-4^{3x}$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $(x^2+x+1)^3 = x^6+x^3+1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2002}+1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f = \left(X^2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right)\left(X^2 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}X + 1\right)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se arate că $X^5 + 1 = (X+1)\cdot f$.

d) Să se arate că, dacă $z \in \mathbb{C}$ este rădăcina polinomului f, atunci $z^5 = -1$.

e) Să se arate că $x_1^{10}+x_2^{10}+x_3^{10}+x_4^{10} = 4$.

f) Să se arate că $\dfrac{1}{x_1^5}+\dfrac{1}{x_2^5}+\dfrac{1}{x_3^5}+\dfrac{1}{x_4^5} = -4$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $P = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \mid A^2 = I_2\}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că $P \in G$ şi $Q \in G$.

c) Să se calculeze $P\cdot Q$.

d) Să se arate că $P\cdot Q \notin G$.

e) Să se arate că, dacă $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{Z}$, atunci $A_n \in G$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{Z}$.

f) Să se demonstreze că mulţimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 2}$, definit prin $a_n = \dfrac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\dfrac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3+1}{n^3-1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se verifice că $f(x+1) = x^2 + x + 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $\dfrac{x^3+1}{x^3-1} = \dfrac{x+1}{x-1} \cdot \dfrac{f(x)}{f(x+1)}$, $(\forall)\ x > 1$.

c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $a_n = \dfrac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^n f(x)\ dx}{n^3}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$", definită prin $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{N}$.

d) Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuaţia $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -3$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x+1) \circ (x^2 - 4) = -3$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$.

c) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Să se calculeze $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.

SUBIECTUL II

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze AB şi BA.

b) Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB şi BA este aceeaşi.

c) Să se arate că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$.

d) Să se demonstreze că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că
$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \ldots \cdot \det(A_n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $(\forall)\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

f) Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea $M = \{a^2 - 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se verifice că $0 \in M$ şi $1 \in M$.

b) Să se verifice identitatea $(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2$, $(\forall)\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că, dacă $x, y \in M$, atunci $x \cdot y \in M$.

d) Să se arate că, dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$, atunci $\hat{a}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

e) Să se arate că, dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3$ şi $\hat{a}^2 - \hat{2}\hat{b}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{a} = \hat{b} = \hat{0}$.

f) Să se arate că $M \neq \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2 + x^4$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^2 + 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) \geq \dfrac{1}{1 + x^2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

e) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f.

f) Notăm cu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{xf(x)}{F(x)}$.